Méthode *Hybrid High-Order*
pour les équations de Leray-Lions
Analyse numérique

Sacha Cardonna

1er décembre 2022

Ce travail consiste à introduire la méthode *Hybrid High-Order* et son extension aux équations elliptiques non-linéaires de *Leray-Lions*, dont un cas particulier est l'équation de $p-$Laplace. Cette dernière apparaît notamment dans la modélisation du mouvements des glaciers, des écoulements turbulents incompressibles en milieux poreux, ou encore dans la conception du profil d'un élément aérodynamique. Les opérateurs de *Leray-Lions* peuvent également être considérés comme une version simplifiée du terme visqueux dans une loi en puissance pour les fluides. Les modèles introduits ici présentent des nouveautés par rapport au problème de *Poisson* (Chap. 2, [1]) ; entre autres la non-linéarité et le cadre non-hilbertien naturellement choisi pour la formulation faible.

1. Modèle de *Leray-Lions*.

Le problème de *Leray-Lions* consiste à trouver $u : \Omega \to \mathbf{R}$, où $\Omega \subset \mathbf{R}^{d\geq 2}$ est un polytope [1] borné, tel que

$$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u) = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{n}_\Omega = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{2}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction flux généralement non-linéaire, f le terme source, g la condition aux limites de Neumann non-homogène et $\boldsymbol{n}_\Omega$ la normale unitaire.
Dans l'exemple du $p-$Laplacien, qui généralise le problème de *Poisson*, on considère que la fonction flux est définie comme

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u) := |\boldsymbol{\nabla} u|^{p-2} \boldsymbol{\nabla} u, \qquad p \in (1, \infty).$$

Soit maintenant $p \in (1, \infty)$ fixé, tel que $p' := \frac{p}{p-1}$. On supposera par la suite que les deux fonctions f, g vérifient [2]

$$f \in L^{p'}(\Omega),\ g \in L^{p'}(\partial\Omega), \ \text{ et } \int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0.$$

Pour discuter du problème, on doit supposer que le flux $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie plusieurs propriétés, qu'on énonce maintenant.

Propriétés du flux. *On admettra par la suite que la fonction flux de Leray-Lions vérifie les points suivants.*

1. *La fonction* $\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \longmapsto \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^d$ *est une* ***fonction de Carathéodory*** *:* $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \cdot, \cdot)$ *est continue pour tout* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ *p.p., et* $\boldsymbol{\sigma}(\cdot, s, \boldsymbol{\xi})$ *est mesurable pour tout* $(s, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ *;*
2. *Définissons* $\hat{p} := \frac{dp}{d-p}$ *si* $p < d$, $\hat{p} := +\infty$ *sinon. Alors il existe une fonction* $\overline{\boldsymbol{\sigma}} \in L^{p'}(\Omega)$ *et des réels* $\beta_{\boldsymbol{\sigma}} \in (0, \infty)$ *et* $t \in [0, \frac{\hat{p}}{p})$ *tels que, pour tout* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ *p.p. et tout* $(s, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$*, on ait l'****inégalité de croissance*** *suivante :*

$$|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\xi})| \leq \overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) + \beta_{\boldsymbol{\sigma}} |s|^t + \beta_{\boldsymbol{\sigma}} |\boldsymbol{\xi}|^{p-1};$$

1. Un polytope est un ensemble vu comme l'intérieur d'une union finie de simplexes.
2. En effet, en intégrant l'équation (1) sur Ω, en considérant (2) et en utilisant le *théorème de divergence*, on obtient

$$\int_\Omega f = -\int_\Omega \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u) = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{n}_\Omega = -\int_{\partial\Omega} g.$$

3. *Pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ p.p. et tout $(s, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, on a la* ***propriété de monotonie*** *suivante :*

$$[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\eta})] \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \geq 0;$$

4. *Il existe $\lambda_{\boldsymbol{\sigma}} \in (0, \infty)$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ p.p. et tout $(s, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, on ait la* ***propriété de coercivité*** *suivante :*

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \lambda_{\boldsymbol{\sigma}} |\boldsymbol{\xi}|^p.$$

Nous avons dans le problème de *Leray-Lions* une condition de Neumann non-homogène ; ainsi pour obtenir la formulation faible de (1), on définit l'espace des fonctions tests comme

$$W_\star^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega u = 0 \right\}.$$

En notant

$$a : (u, v) \in W_\star^{1,p}(\Omega) \times W_\star^{1,p}(\Omega) \longmapsto \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(u, \boldsymbol{\nabla} u) \cdot \boldsymbol{\nabla} v, \qquad \ell : v \in W_\star^{1,p}(\Omega) \longmapsto \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} g v_{|\partial\Omega},$$

la formulation faible du problème est donc :

$$\text{Trouver } u \in W_\star^{1,p}(\Omega) \text{ telle que, pour tout } v \in W_\star^{1,p}(\Omega),\ a(u, v) = \ell(v). \tag{3}$$

2. Discrétisation du problème.

Dans la suite, on considère une famille régulière de maillages polytopaux [3] $(\mathcal{M}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ et $k \geq 0$ un degré polynomial. On définit l'espace global discret $\underline{U}_h^k$ et pour $T \in \mathcal{T}_h$, on définit l'espace local discret $\underline{U}_T^k$ sur les faces d'un élément comme

$$\begin{aligned}
\underline{U}_h^k &:= \left(\bigtimes_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbb{P}^k(T) \right) \times \left(\bigtimes_{F \in \mathcal{F}_h} \mathbb{P}^k(F) \right), \\
\underline{U}_T^k &:= \left\{ \underline{v}_T = (v_T, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_T}) \mid \forall F \in \mathcal{F}_T,\ (v_T, v_F) \in \mathbb{P}^k(T) \times \mathbb{P}^k(F) \right\},
\end{aligned}$$

où $\mathbb{P}^k(T)$ (resp. $\mathbb{P}^k(F)$) est l'espace des polynômes brisés sur T (resp. F). On se munit également de l'opérateur d'interpolation $\underline{I}_h^k : W^{1,1}(\Omega) \to \underline{U}_h^k$ tel que pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$, on ait

$$\underline{I}_h^k u := \left(\pi_T^{0,k} u_{|T}, \left(\pi_F^{0,k} u_{|F} \right)_{F \in \mathcal{F}_T} \right)_{T \in \mathcal{T}_h},$$

où $\pi_\Gamma^{0,k} : W \to \mathbb{P}^k(\Gamma)$, pour $\mathbb{P}^k(\Gamma) \subset W$, est le projecteur L^2-orthogonal [4] sur l'espace polynomial local. L'hypothèse de régularité [5] sur la suite de maillages nous permettra d'utiliser facilement des résultats d'analyse fonctionnelle discrète (notamment les inégalités inverses) ainsi que certaines approximations sur les espaces de polynômes brisés.

En partant des définitions de $W_\star^{1,p}$ pour le problème continu et de celle de $\underline{U}_h^k$, il est naturel de choisir, pour tout pas de maillage h, l'espace discret global et sa norme associée (issue d'une généralisation de $\|\cdot\|_{1,p}$ pour le cas $p = 2$) :

$$\underline{U}_{h,\star}^k := \left\{ \underline{v}_h \in \underline{U}_h^k \;\middle|\; \int_\Omega v_h = 0 \right\}, \qquad \|\underline{v}_h\|_{1,p,h}^p := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\boldsymbol{\nabla} v_T\|_{L^p(\Omega)^d}^p + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} h_F^{1-p} \|v_F - v_T\|_{L^p(F)}^p \right).$$

3. Un maillage polytopal de Ω est un couple $\mathcal{M}_h := (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ tel que l'ensemble des éléments $\mathcal{T}_h$ est une famille finie d'éléments polytopaux non-vides disjoints T, de bord $\partial\Omega$ et de diamètre h_T de sorte que $\max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T = h$ et $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \overline{T} = \overline{\Omega}$.
L'ensemble des faces $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$ est une famille finie de sous-ensembles F de $\overline{\Omega}$ de diamètre h_F, connexes appartenant à un hyperplan de $\mathbf{R}^d$ et tels que $\mathfrak{H}\left(\overline{F} \setminus F\right) = 0$, avec $\mathfrak{H}$ la mesure de Haussdorff.

4. Le projecteur L^2-orthogonal $\pi_T^{0,k} : L^1(T) \to \mathbb{P}^k(T)$ est tel que $\int_T (\pi_T^{0,k} v - v) w = 0$ pour tout $w \in \mathbb{P}^k(T)$.

5. Une famille de maillage $(\mathcal{M}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est dite *régulière* si pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{T}_h$ admet un sous-maillage simplicial $\mathfrak{T}_h$, où $(\mathfrak{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie la régularité de forme au sens de Ciarlet, et la régularité de contact (chaque $S \subset T$ est tel que $h_S \simeq h_T$).

Comme nous avons une condition au bord de Neumann non-homogène, il sera nécessaire d'ajouter l'opérateur de trace discret $\gamma_h : \underline{U}_h^k \to L^p(\partial\Omega)$. Énonçons maintenant trois résultats mimiquant, au niveau discret, des propriétés d'analyse fonctionnelle sur $W_\star^{1,p}$, dont les preuves sont disponibles dans (Sec. 6.5, [1]).

Inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger discrète. *Soient $k \geq 0$ un degré polynomial et un indice $p \in (1, \infty)$ fixés. Soit $(\mathscr{M}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ une suite régulière de maillages. Soit $q \in [1, \frac{dp}{d-p})$ si $p \in [1, d)$ et $q \in [1, \infty)$ si $p \geq d$. Alors pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$, on a*

$$\|v_h\|_{L^q(\Omega)} \lesssim \|\underline{v}_h\|_{1,p,h},$$

avec une constante multiplicative cachée dépendant uniquement de Ω, ρ, k, q et p.

Inégalité de trace discrète sur $\underline{U}_{h,\star}^k$. *Soient $k \geq 0$ un degré polynomial et un indice $p \in (1, \infty)$ fixés. Soit $(\mathscr{M}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ une suite régulière de maillages. Alors pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$, on a*

$$\|\gamma_h \underline{v}_h\|_{L^p(\partial\Omega)} \lesssim \|\underline{v}_h\|_{1,p,h},$$

avec une constante multiplicative cachée dépendant uniquement de Ω, ρ, k et p.

Théorème de compacité discrète. *Soient $k \geq 0$ un degré polynomial et un indice $p \in (1, \infty)$ fixés. Soit $(\mathscr{M}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ une suite régulière de maillages, et soit $(\underline{v}_h)_{h\in\mathscr{H}} \in (\underline{U}_{h,\star}^k)_{h\in\mathscr{H}}$ une suite pour laquelle il existe $C > 0$ tel que $\|\underline{v}_h\|_{1,p,h} \leq C$ pour tout $h \in \mathscr{H}$. Alors il existe $v \in W_\star^{1,p}(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près, quand $h \to 0$, on ait :*
(i) $v_h \to v$ et $r_h^{k+1}\underline{v}_h \to v$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \frac{dp}{d-p})$ si $p \in [1, d)$ et tout $q \in [1, \infty)$ si $p \geq d$;
(ii) $\gamma_h \underline{v}_h \to v_{|\partial\Omega}$ fortement dans $L^p(\partial\Omega)$;
(iii) $\boldsymbol{G}_h^k \underline{v}_h \rightharpoonup \boldsymbol{\nabla} v$ faiblement dans $L^p(\Omega)^d$, où $\boldsymbol{G}_h^k : \underline{U}_h^k \to \mathbb{P}^k(\mathscr{T}_h)^d$ est tel que $(\boldsymbol{G}_h^k \underline{v}_h)_{|T} := \boldsymbol{G}_T^k \underline{v}_T$ et par construction $\boldsymbol{G}_T^k \underline{I}_T^k v = \pi_T^{0,k}(\boldsymbol{\nabla} v)$, où $\boldsymbol{G}_T^k$ est l'opérateur reconstruction de gradient défini dans (4.37), [1].

Les deux premiers résultats seront ainsi utilisés pour l'estimation a priori. Le troisième est quant à lui indispensable pour prouver la convergence de la solution u_h dans le cas où l'estimation d'erreur n'est pas établie (ce qui ne sera pas nécessaire dans le cas de la fonction flux de $p-$Laplace).

2.1. Norme basée sur l'opérateur de reconstruction.

La norme sur $\underline{U}_{h,\star}^k$, ressemblante à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$, est généralement utilisée pour établir des propriétés sur ses sous-espaces : par exemple, le caractère borné des fonctions reconstruites dans les normes de Lebesgue par l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger, ou leur compacité par l'inégalité de trace discrète. Pour étudier la convergence, nous aurons besoin d'ajouter la norme suivante, pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$

$$\|\underline{v}_h\|_{\boldsymbol{G},p,h}^p := \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \left(\|\boldsymbol{G}_T^k \underline{v}_T\|_{L^p(T)^d}^p + |\underline{v}_T|_{\delta,p,T}^p \right) \qquad \text{(cf. (6.17), [1] pour une définition de } |\cdot|_{\delta,p,T}),$$

basées sur les reconstructions locales, qui est équivalente à $\|\cdot\|_{1,p,h}$ d'après (Lem. 6.11, [1]). Par ailleurs, puisque nous considérons ici le $p-$Laplacien et comme l'opérateur de reconstruction de potentiel [6] r_T^{k+1} n'agit que sur $\nabla\mathbb{P}^{k+1}(T)$, nous mettons en place l'opérateur de reconstruction de gradient $\boldsymbol{G}_T^k$ car celui-ci agit sur $\mathbb{P}^k(T)^d$, qui est par définition plus grand que $\nabla\mathbb{P}^{k+1}(T)$.

2.2. Formulation variationnelle et bonne position du problème discret.

La formulation variationelle discrète est

$$\text{Trouver } \underline{u}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k \text{ telle que, pour tout } \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k,\ \ a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \ell_h(\underline{v}_h), \tag{4}$$

6. On rappelle que $r_T^{k+1} : \underline{U}_T^k \to \mathbb{P}^{k+1}(T)$ est tel que $\int_T (\boldsymbol{\nabla} r_T^{k+1}\underline{v}_T - \boldsymbol{G}_T^k \underline{v}_T) \cdot \boldsymbol{\nabla} w = 0$ pour tout $w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$ et $\int_T r_T^{k+1}\underline{v}_T = \int_T v_T$. Cet opérateur contribue à la consistance dans la discrétisation du terme $\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(u, \boldsymbol{\nabla} u)\boldsymbol{\nabla} v$.

où les formes bilinéaires et linéaires [7] sont définies comme suit :

$$a_h : (\underline{u}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k \longmapsto \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(u_h, \boldsymbol{G}_h^k \underline{u}_h) \cdot \boldsymbol{G}_h^k \underline{v}_h + \sum_{T \in \mathscr{T}_h} S_T(\underline{u}_T, \underline{v}_T),$$

$$\ell_h : \underline{v}_h \in \underline{U}_h^k \longmapsto \int_\Omega f v_h + \int_{\partial\Omega} g \gamma_h \underline{v}_h.$$

D'après (Lem. 6.14, [1]), on a au moins une solution $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$, bornée en norme $\|\cdot\|_{1,p,h}$ avec une constante indépendante de h. D'autre part, puisque nous sommes dans le cas de l'équation de $p-$Laplace, où la fonction flux vérifie la monotonie stricte (Th. 6.19, [1]), $\boldsymbol{G}_h^k \underline{v}_h \rightharpoonup \boldsymbol{\nabla} v$ fortement dans $L^p(\Omega)^d$, et il existe une unique solution $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$: le problème est donc bien posé.

2.3. Formulation du flux.

D'une façon analogue à la formulation du flux pour le problème de *Poisson* (Sec. 2.2.5, [1]), on a une autre formulation du flux, basée sur l'opérateur de reconstruction du gradient $\boldsymbol{G}_T^k$. Ainsi, pour tout $(T, F) \in \mathscr{T}_h \times \mathscr{F}_h$, on définit la trace numérique normale de flux, pour tout $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$, par

$$\Phi_{TF}(\underline{u}_T) := -\pi_T^{0,k} \left(\boldsymbol{\sigma}(u_T, \boldsymbol{G}_T^k \underline{u}_T) \right) \cdot \boldsymbol{n}_{TF} + R_{TF}^k(\underline{u}_T)$$

où R_{TF}^k est définie dans (6.33), [1]. L'introduction de cette trace permet notamment d'obtenir une formulation du flux, se traduisant par le bilan local

$$\int_T \boldsymbol{\sigma}(u_T, \boldsymbol{G}_T^k \underline{u}_T) \cdot \boldsymbol{\nabla} v_T + \sum_{F \in \mathscr{F}_T} \int_F \Phi_{TF}(\underline{u}_T) v_T = \int_T f v_T,$$

pour tout $T \in \mathscr{T}_h$ et tout $v_T \in \mathbb{P}^k(T)$. De plus, cette trace numérique normale de flux est continue aux interfaces [8], et pour toute face au bord $F \in \mathscr{F}_h^b$, si l'on prend $T \in \mathscr{T}_h$ tel que $F \in \mathscr{F}_T$, on a alors $\Phi_{TF}(\underline{u}_T) = -\pi_T^{0,k} g$.
En effet, à la différence du problème de *Poisson*, on a ici besoin d'informations sur les valeurs du flux numérique au bord, à cause de la condition au bord de Neumann non-homogène (2).

3. Estimation d'erreur pour le $p-$Laplacien.

Considérons maintenant le cas particulier du $p-$Laplacien et supposons que la solution du problème (3) est plus régulière, de sorte que, pour tout $r \in [\![0, k]\!]$, on ait

$$u \in W^{r+2,p}(\mathscr{T}_h) \;\text{ et }\; \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla} u) \in W^{r+1,p'}(\mathscr{T}_h)^d.$$

Estimation d'erreur. *Soient $k \geq 0$ un degré polynomial, $p \in (0, \infty)$ fixé, et on suppose que pour $\boldsymbol{x} \in \Omega$ p.p., tout $s \in \mathbf{R}$ et tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$, on ait $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, s, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^{p-2}\boldsymbol{\xi}$. Soit $h \in \mathscr{H}$ un pas de maillage et supposons que la solution de (3) vérifie $u \in W^{r+2,p}(\mathscr{T}_h)$ et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla} u) \in W^{r+1,p'}(\mathscr{T}_h)^d$ pour $r \in [\![0, k]\!]$. Définissons la quantité $E_h(u) \in \mathbf{R}^+$ de la manière suivante :*

$$E_h(u) := \begin{cases} h^{r+1}|u|_{W^{r+2,p}(\mathscr{T}_h)} + h^{\frac{r+1}{p-1}} \left(|u|_{W^{r+2,p}(\mathscr{T}_h)}^{\frac{1}{p-1}} + |\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla} u)|_{W^{r+1,p'}(\mathscr{T}_h)^d}^{\frac{1}{p-1}} \right) & \text{si } p \geq 2, \\ h^{(r+1)(p-1)}|u|_{W^{r+2,p}(\mathscr{T}_h)}^{p-1} + h^{r+1}|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla} u)|_{W^{r+1,p'}(\mathscr{T}_h)^d} & \text{si } p < 2. \end{cases}$$

$$\lesssim \begin{cases} \mathscr{O}\left(h^{\frac{r+1}{p-1}}\right) & \text{si } p \geq 2, \\ \mathscr{O}\left(h^{(r+1)(p-1)}\right) & \text{si } p < 2. \end{cases}$$

Alors il existe un unique $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$ solution de (4) et qui satisfait

$$\|\underline{u}_h - \underline{I}_h^k u\|_{\boldsymbol{G},p,h} \lesssim E_h(u).$$

7. L'opérateur $S_T : (\underline{u}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k \mapsto \sum_{F \in \mathscr{F}_T} h_F^{1-p} \int_F |\delta_{TF}^k \underline{u}_T - \delta_T^k \underline{u}_T|^{p-2} (\delta_{TF}^k \underline{u}_T - \delta_T^k \underline{u}_T)(\delta_{TF}^k \underline{v}_T - \delta_T^k \underline{v}_T)$ est une fonction de stabilisation locale intervenant dans l'expression de a_h, obtenue à partir des opérateurs $\delta_{TF}^k, \delta_T^k$ définis en (2.19), [1].

8. Pour toute interface $F \in \mathscr{F}_h^i$ telle que $F \subset (\partial T_1 \cap \partial T_2)$ avec deux éléments différents $T_1, T_2 \in \mathscr{T}_h$, on a $\Phi_{T_1 F}(\underline{u}_{T_1}) + \Phi_{T_2 F}(\underline{u}_{T_2}) = 0$

Cette estimation d'erreur fournit alors un résultat de convergence pour l'erreur mesurée comme la différence entre le gradient discret et le gradient continu : en effet, on a

$$\|\boldsymbol{G}_h^k \underline{u}_h - \boldsymbol{\nabla} u\|_{L^p(\Omega)^d} + |\underline{u}_h|_{\delta,p,h} \lesssim E_h(u) + h^{r+1}|u|_{W^{r+2,p}(\mathcal{T}_h)},$$

où on a introduit la semi-norme $|\cdot|_{\delta,p,h}$ sur $\underline{U}_{h,\star}^k$ telle que pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$,

$$|\underline{v}_h|_{\delta,p,h}^p := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} |\underline{v}_T|_{\delta,p,T}^p = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} S_T(\underline{v}_T;\underline{v}_T).$$

Comme pour l'équation continue (3), le schéma *Hybrid High-Order* (4) est bien sûr non-linéaire en général. Les résultats que l'on utilise pour le problème de *Poisson* ne sont donc pas directement applicables. Cependant, certaines des similitudes avec cette théorie linéaire peuvent être trouvées et exploitées. Plus précisément, par (4), pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,\star}^k$ on a

$$a_h(\underline{u}_h,\underline{v}_h) - a_h(\underline{I}_h^k u,\underline{v}_h) = \ell_h(\underline{v}_h) - a_h(\underline{I}_h^k u,\underline{v}_h).$$

Le membre de droite de l'équation est une application linéaire en $\underline{v}_h$ qui définit une erreur de consistance ε_h, identique à celle du cas linéaire. Comme le membre de gauche de cette équation contient $\underline{u}_h$ et $\underline{I}_h^k u$, on pourrait considérer cela comme une sorte d'équation d'erreur sauf que, contrairement au cas du problème de *Poisson* vu en cours, ce second membre n'est pas une expression de différence $\underline{u}_h - \underline{I}_h^k u$. On peut néanmoins avoir la même démarche que dans le cas linéaire, en estimant l'erreur de consistance dans une norme duale appropriée, et établir une propriété de stabilité du membre de droite dans une norme primale correspondante ($\|\cdot\|_{a,h}$).

L'erreur de consistance sera estimée, comme dans le cas linéaire, en exprimant ℓ_h en fonction de u par les relations $f = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla} u))$ et $g = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla} u)\cdot n_\Omega$, et également en considérant des propriétés d'approximation optimales des reconstructions composées avec l'interpolateur. La propriété de stabilité, en revanche, ne dépendra pas directement d'une condition inf–sup ou de coercivité, mais plutôt sur de propriétés de monotonie de a_h (découlant des propriétés de monotonie de $\boldsymbol{\sigma}$).

4. Convergence par compacité pour les opérateurs de *Leray-Lions*.

Plus généralement, dans le cas du problème de *Leray-Lions* tel qu'introduit dans la première section, établir une estimation d'erreur est impossible, car cela imposerait l'unicité de la solution du modèle continu, ce qui n'est pas toujours le cas (Rem. 6.16, [1]).

L'analyse de convergence du schéma *Hybrid High-Order* est effectuée à l'aide de techniques de compacité : on établit d'abord des estimations a priori sur la solution du schéma (Lem. 6.14, [1]). Ensuite, on montre que les suites satisfaisant ces estimations bénéficient de propriétés de compacité par le théorème de compacité discrète. La dernière étape consiste à montrer que les limites de ces suites résolvent le problème continu. Ainsi, la convergence des solutions au problème (4) est prouvée par le théorème (Th. 6.29, [1]).

Pour terminer, remarquons que cette convergence est démontrée pour les solutions exactes qui n'affichent que la propriété de régularité minimale $u \in W_\star^{1,p}(\Omega)$, requise par la formulation faible (3). Il s'agit d'un point important lorsque l'on traite des problèmes non-linéaires, pour lesquels la régularité est parfois inconnue, ou nécessite des hypothèses sur les données qui sont trop fortes pour être considérées dans un cadre physique réaliste.

Références

[1] D. A. Di Pietro & J. Droniou. The Hybrid High-Order method for polytopal meshes. Design, analysis, and applications. T. 19. Modeling, Simulation and Application. Springer International Publishing, 2020.